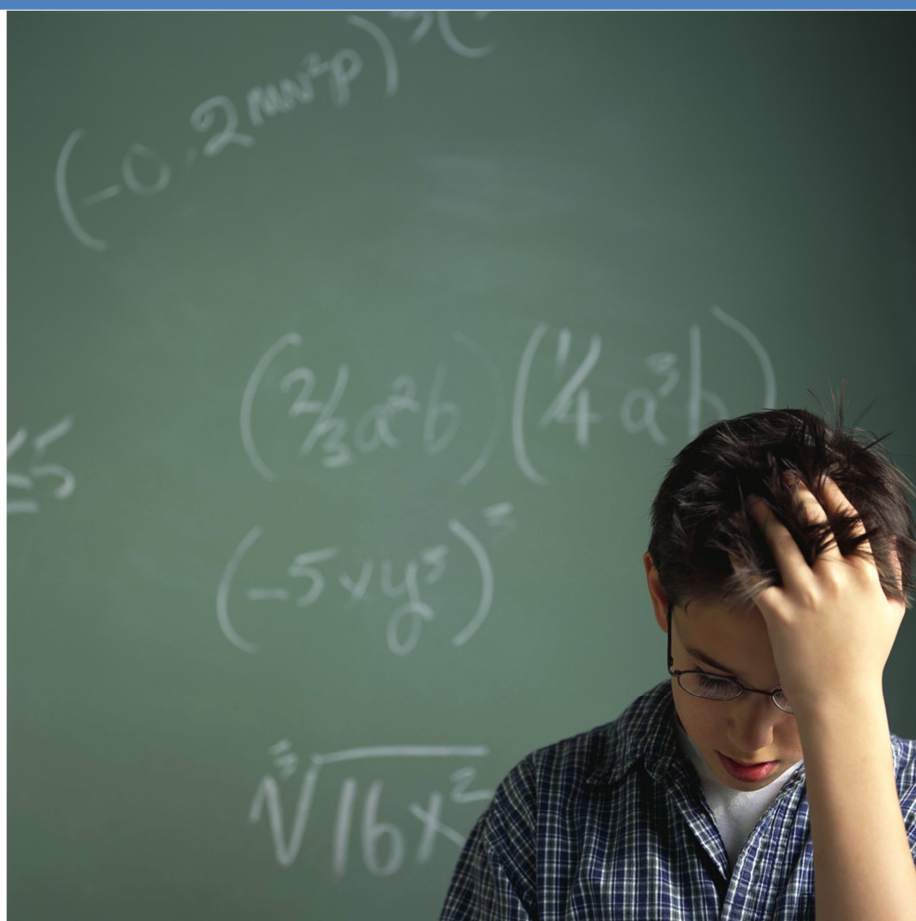




2011
ГОД

Высшая математика для чайников.
Производные и дифференциалы.



ВЫСШАЯ
МАТЕМАТИКА

$$\int f(x) dx$$

Виосагмир И.А.
Предел функции
2011 год

viosagmir@gmail.com

Глава 1. Производная функции.

Содержание:

1) Самое главное о производной

1. Самое главное о производной

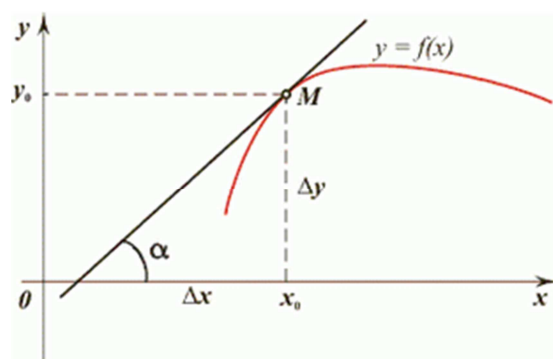
Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Приращением этой функции в точке x_0 называется функция аргумента Δx

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ также является функцией аргумента Δx .

Определение

Производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 называется $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ (если он существует).



Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Операция нахождения производной называется *дифференцированием*.

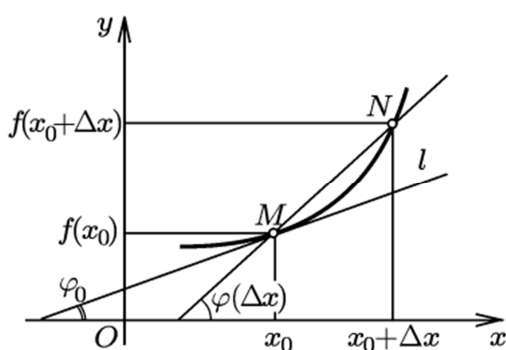
Что такое простейшие функции, я писать не буду. В моей первой книге все подробно описано и даны примеры. Чуть ниже вы видите таблицу производных простейших функций. Она дается в 9 – 10 классах, и ее все долго и нудно учат. Я вам рекомендую сделать так же. Потратьте время на то, что бы она навсегда осталась у вас в голове.

Таблица производных

- | | |
|--|---|
| 1) $(x^a)' = ax^{a-1}$ (a – любое число) | 7) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ ($x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}$) |
| 2) $(\sin x)' = \cos x$ | 8) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) |
| 3) $(\cos x)' = -\sin x$ | 9) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ($-1 < x < 1$) |
| 4) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | 10) $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ |
| 5) $(a^x)' = a^x \ln a$ | 11) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ |
| 6) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | 4') $(\ln x)' = 1/x$ ($x > 0$) |
| | 5') $(e^x)' = e^x$ |

- 1. Физический смысл производной.** Производная $f'(x_0)$ — это скорость изменения функции $y = f(x)$ в точке x_0 (иными словами, скорость изменения зависимой переменной y по отношению к изменению независимой переменной x в точке x_0). В частности, если x — время, $y(x)$ — координата точки, движущейся по прямой, в момент x , то $f'(x_0)$ — мгновенная скорость точки в момент времени x_0 .

- 2. Геометрический смысл производной.** Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Точки M и N имеют следующие координаты: $M(x_0, f(x_0))$, $N(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$. Угол между секущей MN и осью Ox обозначим $\varphi(\Delta x)$.



Определение

Если существует $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, то прямая l с угловым коэффициентом $k = \operatorname{tg} \varphi_0$, проходящая через точку $M(x_0, f(x_0))$, называется касательной к графику

функции $y = f(x)$ в точке M .

Теорема 1

Если функция $y = f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то график функции имеет в точке $M(x_0, f(x_0))$ касательную, причем $f'(x_0)$ является угловым коэффициентом касательной, т.е. уравнение касательной записывается в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

- 3. Односторонние производные.** Если существуют

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \pm 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется правой (или левой) производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0 + 0)$ (или $f'(x_0 - 0)$). Обратно: если существует $f'(x_0)$, то существуют $f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)$, причем $f'(x_0 + 0) = f'(x_0 - 0) = f'(x_0)$.

- 4. Правила дифференцирования.**

Теорема 2

Если $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные в точке x_0 , то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x) \neq 0$) также имеют производные в точке x_0 , причем в точке x_0 справедливы равенства

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u - v)' = u' - v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Ну что же, имея эти 4 правила мы уже что-то можем посчитать. Я имею ввиду простые функции. Это начало 9-10 класса. Давайте все повторим, что бы у вас это уже больше никогда не вызывало вопросов. Начнем с примеров.

№1. Найти производную функции

$$y = 2x$$

Решение:

$$y' = (2x)' = \langle (c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x) \rangle = 2 \cdot x' = \langle (x^a)' = ax^{a-1} \rangle = 2 \cdot (x^1)' = 2 \cdot 1 \cdot x^0 = 2$$

Решение написано ну уж очень подробно. Здесь предусмотрено все! Это элементарнейшие примеры. Запомните, что константа всегда выносится!

№2. Найти производную функции

$$y = x^2$$

Решение:

$$y' = (x^2)' = \langle (x^a)' = ax^{a-1} \rangle = 2x^{2-1} = 2x$$

Все то же самое, что и в прошлый раз.

№3. Найти производную функции

$$y = 2 + x^2 + x^3 + x^4$$

Решение:

$$\begin{aligned} y' &= (2 + x^2 + x^3 + x^4)' = \langle (u + v)' = u' + v' \rangle = 2' + (x^2)' + (x^3)' + (x^4)' \\ &= \langle (x^a)' = ax^{a-1} \rangle = 0 + 2x + 3x^2 + 4x^3 \end{aligned}$$

Чуть объемнее, но тоже все одно и то же.

№4. Найти производную функции

$$y = \frac{2 + x^3 + 2x}{\sin x}$$

Решение:

Здесь хотя бы что-то есть ☺.

$$y' = \left(\frac{2 + x^3 + 2x}{\sin x} \right)' = \left\{ \left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right\} = \frac{(2 + x^3 + 2x)' \cdot \sin x - \sin' x \cdot (2 + x^3 + 2x)}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{(0 + 3x^2 + 2) \cdot \sin x - \cos x \cdot (2 + x^3 + 2x)}{\sin^2 x}$$

Дальше не хочется считать. Главное, что бы вы поняли, как мы это все получили. Если непонятно, то просмотрите первые три примера. Если и они не понятны, тогда открывайте учебник 9-10 класса и читайте там. Книга называется «Высшая математика для ...», а не «Повторение школы».

№5. Найти производную функции:

$$y = \sin x \cdot x^6$$

Решение:

$$y' = (\sin x \cdot x^6)' = \{(uv)' = u'v + uv'\} = \sin' x \cdot x^6 + \sin x \cdot (x^6)' = x^6 \cos x + 6x^5 \sin x$$

Тоже все просто.

№6. Найти производную функции

$$y = \operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x}$$

Решение:

$$y' = \left(\operatorname{tg} x + \frac{e^x}{1+x} \right)' = (\operatorname{tg} x)' + \left(\frac{e^x}{1+x} \right)' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(e^x)'(1+x) - (1+x)'e^x}{(1+x)^2}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{(1+x)e^x - e^x}{(1+x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{xe^x}{(1+x)^2}$$

Как видите, функция большая, а производная берется легко.

№7. Найти производную функции

$$y = \frac{2x^2 - 1}{2x^2 + 1}$$

Решение:

$$y' = \frac{(2x^2 - 1)'(2x^2 + 1) - (2x^2 + 1)'(2x^2 - 1)}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{4x(2x^2 + 1) - 4x(2x^2 - 1)}{(2x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{4x(2x^2 + 1 - 2x^2 + 1)}{(2x^2 + 1)^2} = \frac{8x}{(2x^2 + 1)^2}$$

Все просто ☺. Прежде чем идти дальше, советую выучить таблицу производных, иначе вам будет сложно. На этом мы заканчиваем считать производные от простых функций.

5. Производная сложной функции

Теорема 3

Если функция $t = \varphi(x)$ имеет в точке x_0 производную $\varphi'(x_0)$, а функция $y = \psi(t)$ имеет в точке $t_0 = \varphi(x_0)$ производную $\psi'(t_0)$, то сложная функция $y = \psi(\varphi(x)) \equiv f(x)$ имеет производную в точке x_0 , причем

$$f'(x_0) = \psi'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0).$$

№1. Найти производную функции

$$y = \sqrt{x^2 + 4}$$

Решение:

Перед нами собственной персной сложная функция. Значит так, сейчас прошу “вчитаться” в каждое мое слово. Наша функция y состоит из двух функций. Внутренней - $\varphi(x) = (x^2 + 4)$, и внешней - $\psi(x) = \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{\varphi(x)}$. Надеюсь, это понятно. Идем дальше. Производную функции мы ищем так: сначала выписываем производную внутренней функции, потом – производную внешней функции, и наконец, мы их перемножаем. Получается что-то вроде этого:

$$y' = \varphi'(x) \cdot \psi'(x)$$

Давайте сделаем эти ходы!

$$\varphi'(x) = (x^2 + 4)' = 2x$$

$$\psi'(x) = (\sqrt{x^2 + 4})' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}}$$

Напоминаю, что здесь использовалось лишь одно первое правило (в таблице производных). Таким образом, мы получаем:

$$y' = \varphi'(x) \cdot \psi'(x) = 2x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

№2. Найти предел функции

$$y = (2x^3 + 5)^4$$

Решение:

У нас две функции: $y = 2x^3 + 5$ – внутренняя и $y = (2x^3 + 5)^4$ – внешняя. Производную ВСЕГДА начинаем искать в направлении от внутренней к внешней! Потом просто перемножаем их.

Вот, что у нас получится:

$$y' = ((2x^3 + 5)^4)' = (2x^3 + 5)' \cdot ((2x^3 + 5)^4)' = 2 \cdot 3 \cdot x^{3-1} \cdot ((2x^3 + 5)^4)' \\ = 6x^2 \cdot 4 \cdot (2x^3 + 5)^3 = 24x^2 \cdot (2x^3 + 5)^3.$$

Что мы сделали? Взяли производную внутренней функции и внешней, и их перемножили!

Если хотите, то могу расписать еще более подробно. Обозначим $2x^3 + 5 = u$; тогда $y = u^4$.

По правилу дифференцирования сложной функции имеем

$$y' = (u^4)'_u (2x^3 + 5)'_x = 4u^3 (6x^2) = 24x^2 \cdot (2x^3 + 5)^3$$

Честно скажу, что первый вариант мне нравится больше, но, конечно же, за вами последний выбор, как решать.

№3. Найти предел функции

$$y = \cos^2 x$$

Решение:

Внутренняя функция — $u = \cos x$; внешняя функция — $y = u^2$. Таким образом, получаем

$$y' = (\cos^2 x)' = \sin x \cdot (\cos^2 x)' = -\sin x \cdot 2 \cdot \cos x = -2 \sin x \cos x$$

№4. Найти предел функции

$$y = \sin(2x + 3)$$

Решение:

Внутренняя функция — $u = 2x + 3$; внешняя функция — $y = \sin u$. Таким образом, получаем

$$y' = (\sin(2x + 3))' = 2 \cdot (\sin(2x + 3))' = 2 \cdot \cos(2x + 3)$$

№5. Найти предел функции

$$y = \sin^3 \frac{x}{3}$$

Решение:

Сложная функция состоит из трех простых: $u = \frac{x}{3}$, $v = \sin u$, v^3 . Все делаем так же, как и в прошлые разы: ищем производные трех функций и перемножаем ☺.

$$y' = u' v' (v^3)' = \left(\sin^3 \frac{x}{3}\right)' = \left(\frac{x}{3}\right)' \left(\sin \frac{x}{3}\right)' \left(\left(\sin \frac{x}{3}\right)^3\right)' = \frac{1}{3} \cdot \cos \frac{x}{3} \cdot 3 \cdot \left(\sin \frac{x}{3}\right)^2 = \sin^2 \frac{x}{3} \cos \frac{x}{3}$$

Сложно? Нет ☺! Только внимательность, остальное нужно знать просто формулы и все!

6. Производная обратной функции**Теорема 4**

Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0 , имеет производную в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая определена в некоторой окрестности точки $y_0 = f(x_0)$ и имеет производную в точке y_0 , причем

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ или } y'_x = \frac{1}{x'_y}.$$

№1. Найти производную обратной функции

$$y = \ln x$$

Решение:

$$y = \ln x \rightarrow x = e^y$$

Вот, что у нас получается:

$$y'_x = (\ln x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(e^y)'} = \frac{1}{y' \cdot e^y} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}.$$

Считаем здесь переменную y независимой, т.е. $y' = 1$.